第11講　関数の増減

PART1 関数の増加と減少

要点整理と公式

要点① 導関数の符号と関数の増加，減少

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとする。このとき，関数 $f(x)$ の増加，減少について次のことが成り立つ。

導関数の符号と関数の増減

1　開区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で増加する

2　開区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で減少する

3　開区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で定数である

(1 の証明)

閉区間 $[a,\ b]$ において，$a \leqq x_1$，$x_2 \leqq b$，$x_1<x_2$ を満たす任意の 2 つの値 x_1，x_2 をとると，平均値の定理により

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c),\quad x_1<c<x_2$$

を満たす実数 c が存在する。

開区間 $(a,\ b)$ で常に $f'(x)>0$ ならば，$f'(c)>0$ であり，$x_2-x_1>0$ であるから

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \qquad \text{つまり} \qquad f(x_1)<f(x_2)$$

したがって，閉区間 $[a,\ b]$ に含まれる任意の 2 つの値 x_1，x_2 に対して

$$x_1<x_2 \qquad \text{ならば} \qquad f(x_1)<f(x_2)$$

が成り立つ。よって，1 が成り立つ。

2，3 についても同様に証明することができる。

(ex) 関数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ の増減

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x$$

$f'(x)$ 　　 とすると $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	1		$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}\pi+1$

したがって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq 2\pi$ で増加し，$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$ で減少する。

区間内に，$f'(c)=0$ となるような x の値 c があっても，その他の x の値で

$f'(x)>0$ ならば $f(x)$ は増加

$f'(x)<0$ ならば $f(x)$ は減少

する。

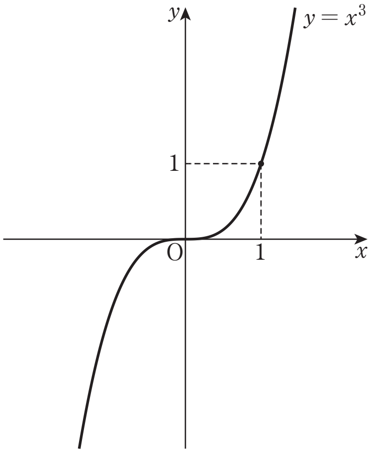
(ex) 関数 $f(x)=x^3$ の増減

$$f'(x)=3x^2$$

$x=0$ のとき $f'(x)=0$

$x\neq 0$ のとき $f'(x)>0$

したがって，$f(x)$ はつねに増加する。



1 次の関数の増減を調べよ。

(1) $f(x)=\log x$　　(2) $f(x)=xe^{-x}$　　(3) $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$

Point Pickup

関数の増減

開区間 $(a,\ b)$ で常に

$f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で増加

$f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で減少

$f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で定数

定義域に注意して，増減を調べる。

増減の区間には，区間の端を含む。

第11講 PART1 確認問題

1 関数 $f(x)=-\log 2x$ の増減を調べよ。[ア]

答えは下の①，②のうちから選べ。

① つねに増加する　　② つねに減少する

2 関数 $f(x)=(x-2)e^x$ の増減を調べよ。

ただし，[ウ]，[エ] は下の①，②のうちから選べ。

$x\leqq$ [イ] で [ウ]

[イ] $\leqq x$ で [エ]

① 増加する　　② 減少する

3 関数 $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x}$ において，

$$f'(x)=\frac{(x+\boxed{オ})(x-\boxed{カ})}{x^2}$$

であり，$f(x)$ は，

$x\leqq -$ [キ]，[ク] $\leqq x$ で [ケ]

$-$ [キ] $\leqq x<0$，$0<x\leqq$ [ク] で [コ]

[ケ]，[コ] は下の①，②のうちから選べ。

① 増加する　　② 減少する

第11講　関数の増減

PART1　関数の増加と減少

1　次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=\log x$　(2)　$f(x)=xe^{-x}$　(3)　$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-2}$

[解答]

(1)　関数 $f(x)$ の定義域は $x>0$

$$f'(x)=\frac{1}{x}>0$$

したがって，$f(x)$ はつねに増加する。

(2)　$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$ とすると $x=1$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

したがって，$f(x)$ は

$x \leqq 1$ で増加　$1 \leqq x$ で減少

(3)　関数 $f(x)$ の定義域は $x \neq 2$

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{(x-2)^2-1}{(x-2)^2}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると $x=1,\ 3$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1	↘	／	↘	3	↗

したがって，$f(x)$ は

$x \leqq 1,\ 3 \leqq x$ で増加　$1 \leqq x<2,\ 2<x \leqq 3$ で減少

第11講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

関数 $f(x)$ の定義域は，$x>0$

$$f'(x)=-\frac{2}{2x}=-\frac{1}{x}<0$$ [A]

したがって，$f(x)$ は**つねに減少する**

[A]　関数の増減
開区間 $(a,\ b)$ で常に
$f'(x)>0$ ならば，
　$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で増加
$f'(x)<0$ ならば，
　$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で減少
$f'(x)=0$ ならば，
　$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で定数

2

[正解] イ：1，ウ：②，エ：①

[解説]

$$f'(x)=e^x+(x-2)e^x$$ [B]

$$=(x-1)e^x$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=1$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$

[C]

したがって，$f(x)$ は，

$x\leqq 1$ で減少する

$1\leqq x$ で増加する

[B]　$f'(x)$
$=(x-2)'e^x+(x-2)\cdot(e^x)'$

[C]　増減表を作って，確認する。

3 **[正解]** オ：2，カ：2，キ：2，ク：2，ケ：①，

コ：②

[解説]

$f(x)$ の定義域は，$x \neq 0$

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$$ [D]

$$=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

[D] $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると，$x=\pm 2$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-2	↘	／	↘	6	↗

したがって，$f(x)$ は

$x \leqq -2$，$2 \leqq x$ で増加する

$-2 \leqq x < 0$，$0 < x \leqq 2$ で減少する